AM2 FINAL

HOJA Nº 1/4

FECHA 29-7-25

(T1) V o F

a) Si $z = h(x,y)$ está definida implícitamente por $\overbrace{xz+z+y+\ln(z-xy)=10}^{S}$ en un entorno del punto $(2,1,h(2,1))$, entonces la recta normal al gráfico de h en el punto $(2,1,h(2,1))$ es paralela a la recta r

$$r:\begin{cases}-2x-y+8=0 \rightarrow y = 8-2x\\ z=3\end{cases}$$

$$\boxed{r: \vec{\beta}(t) = (t, 8-2t, 3)} = t\underbrace{(1,-2,0)}_{\text{dirección}} + (0,8,3)$$

$$G(x,y,z) = xz+z+y+\ln(z-xy)-10$$

$$G(2,1,z_0) = \underbrace{2z_0}_{6} + \underbrace{z_0}_{3} + 1 + \ln(z_0-2) - 10 = 0$$

$z_0 = 3$

$x=2$, $y=1$ $\rightarrow$ $z=3$ $\rightarrow$ $\boxed{h(2,1)=3}$

x TFI $\rightarrow N_S \parallel \nabla G(2,1,3)$

tomo $k=1$ (no importa la proporción)

$$N_S = k\nabla G(2,1,3)$$

$$G'_x = z + \frac{-y}{z-xy} \longrightarrow G'_x(2,1,3) = 3 - \frac{1}{1} = 2$$

$$G'_y = 1 + \frac{-x}{z-xy} \longrightarrow G'_y(2,1,3) = 1 - \frac{2}{1} = -1$$

$$G'_z = x+1+\frac{1}{z-xy} \longrightarrow G'_z(2,1,3) = 2+1+\frac{1}{1} = 4$$

$$\boxed{N_S = (2,-1,4)}$$

¿$N_S \parallel r$?

$$(2,-1,4) \overset{?}{=} k(1,-2,0)$$

$$\begin{cases}2 = k\\ -1 = -2k\\ 4 = 0\end{cases}$$ Absurdo $\rightarrow \nexists\, k \mid N_S \parallel r$

F

NOTA

(+1)

Pol. taylor

b) Si el polinomio de Maclaurin de 2° grado asociado a la función $f(x,y)$ es $T_2(x,y) = 3+2x^2+y^2$ entonces el punto $(0,0)$ es un punto mínimo local de f

x T. taylor : $T_2(0,0) = f(0,0) = 3$

$T_2{}'_x(0,0) = f'_x(0,0) = 4x|_{(0,0)} = 0$

$T_2{}'_y(0,0) = f'_y(0,0) = 2y|_{(0,0)} = 0$

$\bar{\nabla} f(0,0) = (0,0)$ $\boxed{(0,0) \text{ es PC}}$ ✓

Criterio del hessiano

$f''_{xx}(0,0) = T''_{xx}(0,0) = 4$

$f''_{xy}(0,0) = T''_{xy}(0,0) = 0 \rightarrow H(0,0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$f''_{yy}(0,0) = T''_{yy}(0,0) = 2$

$|H(0,0)| = 8 > 0$ y $f''_{xx} = 4 > 0$

$\boxed{f \text{ alcanza mínimo local en } (0,0)}$

(V)

NOTA

AM 2	Final	HOJA Nº 2/4 FECHA 29-7-25

(T2) a) Definir derivada direccional de un campo escalar f en un punto $\bar{x}_0$ según $\breve{u}$

$$f'(\bar{x}_0, \breve{u}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\bar{x}_0 + h\breve{u}) - f(\bar{x}_0)}{h}$$

b) Analizar la existencia de las derivadas direccionales del campo escalar:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

en el punto $(0,0)$ ¿Es f continua en dicho punto?

- $f(0,0) = 0$
- $¿\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)?$: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \xrightarrow{si\ y=0} \lim = 0$, $\xrightarrow{si\ x=0} \lim \frac{y}{\sqrt{y^2}} = \pm 1$ $\not\exists$

$$\boxed{\not\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \rightarrow f \text{ NO es cont en } (0,0)}$$

$\breve{u} = (a,b)$ con $a^2+b^2 = 1$

$$f'((0,0),u) = \lim_{h\to 0} \frac{f((0,0)+h\breve{u}) - \overset{0}{f(0,0)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(ha,hb)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\cancel{h}} \cdot \frac{\cancel{h}b}{\sqrt{h^2a^2+h^2b^2}} = \lim_{h\to 0} \frac{b}{\sqrt{h^2\underbrace{(a^2+b^2)}_{1}}} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{b}{|h|} \rightarrow si\ b=0 \rightarrow \lim = 0, \quad \rightarrow si\ b\neq 0 \rightarrow \not\exists \lim$$

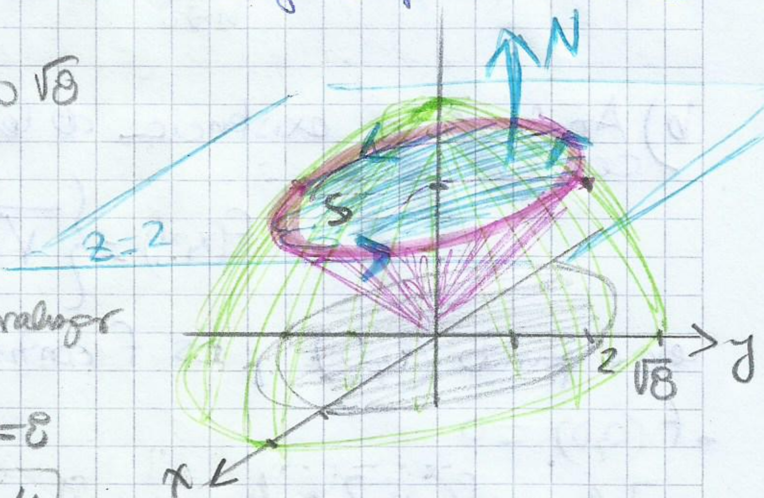
$$\boxed{f'((0,0),\breve{u}) = 0 \quad \text{para } \breve{u}_1 = (1,0) \text{ y } \breve{u}_2 = (-1,0)}$$

NOTA

(P1) Dado el campo $\bar{F}$ de clase $C^1(\mathbb{R}^3)$ tal que ~~rot(F)=~~ $rot(\bar{F}) = (\alpha(x), \beta(y), 3z)$, calcular la circulación de $\bar{F}$ a lo largo de la curva:

$$C: \begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 8 \\ z = \sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$$

Indicar, en el gráfico, la orientación elegida para recorrer C



$\begin{cases} \boxed{x^2+y^2+z^2 = 8} \Rightarrow \text{esfera radio } \sqrt{8} \\ \boxed{z = \sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow \text{cono} + \\ z \geq 0 \quad \Rightarrow z^2 = x^2+y^2 \end{cases}$

Hallo la intersección para analizar la proyección

$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 8 \\ z^2 = x^2+y^2 \end{cases} \rightarrow 2(x^2+y^2) = 8$

$\boxed{x^2+y^2 = 4}$

$z^2 = 4$

$z \geq 0 \rightarrow z = 2 \rightarrow$ la curva está contenida en un plano

$\rightarrow N = (0,0,1)$

reescribo $C: \begin{cases} x^2+y^2 = 4 \\ z = 2 \end{cases}$

$\begin{cases} C \text{ es una curva suave orientada + según } N = (0,0,1) \\ S \text{ es la porción del plano } z=2 \text{ cuyo borde es } C \\ \bar{F} \in C^1 \text{ por enunciado} \end{cases}$

$\Rightarrow$ x Stokes $\displaystyle \oint_{C^+} \bar{F} d\bar{l} = \iint_S rot(\bar{F}) d\bar{S} = \iint_{S_{xy}} rot(\bar{F}) N dx dy =$

$\displaystyle = \iint_{S_{xy}} (\alpha(x), \beta(y), 3z)(0,0,1)\, dx dy = \iint_{S_{xy}} 3\overset{z=2}{z}\, dx dy =$

en $z=2$ $\displaystyle = 6 \underbrace{\iint_{S_{xy}} dx dy}_{\text{Área de } S} = 6 \cdot \pi \cdot 2^2 = 24\pi$

$$\boxed{\oint_{C^+} \bar{F} d\bar{l} = 24\pi}$$

NOTA

AM2	Final	HOJA N° 3/4 FECHA 29-7-25

P2 Si $y = f(x)$ es la solución particular de $y'' + 4y = 8$ que tiene recta tangente de ec. $y = 6x + 2$ en el punto $(0, y_0)$, determinar cuáles son los valores máximos y mínimo de f en el intervalo $[0, \pi]$

SH) $y'' + 4y = 0$

$r^2 + 4 = 0 \to r_1 = 2i,\ r_2 = -2i \to \boxed{y_H = A\cos(2x) + B\,\mathrm{sen}(2x)}$

SP) $y_P = C \to y'_P = y''_P = 0$

$0 + 4C = 8 \to C = 2 \to \boxed{y_P = 2}$

$y_G = A\cos(2x) + B\,\mathrm{sen}(2x) + 2$

$y'_G = -2A\,\mathrm{sen}(2x) + 2B\cos(2x)$

recta tang: $y = 6x + 2 \Rightarrow y(0) = 2$

$\to y'(0) = 6$

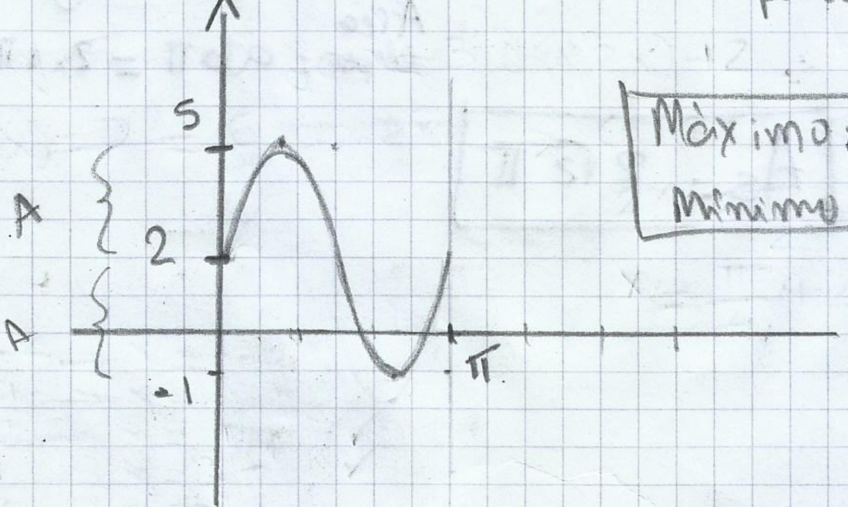
$y(0) = A + 2 = 2 \to \boxed{A = 0}$

$y'(0) = 2B = 6 \to \boxed{B = 3}$

$\boxed{y(x) = 3\,\mathrm{sen}(2x) + 2}$

Amplitud 3

$\underbrace{3 + 2}$



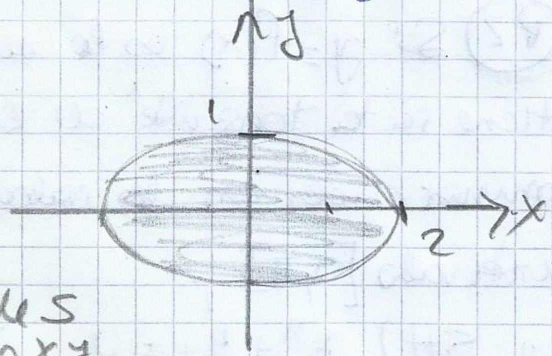
$\boxed{\begin{array}{l} \text{Máximo: } 5 \\ \text{Mínimo: } \underbrace{-1}_{-3+2} \end{array}}$

(P3) Calcular el área de trozo de sup $\overbrace{z=\sqrt{x^2+y^2}}^{S}$ con $x^2+4y^2 \le 4$

$$\frac{x^2}{4}+\frac{4y^2}{4} \le 1$$

$$\frac{x^2}{4}+y^2 \le 1$$

$\boxed{a=2}$ $\qquad$ $\boxed{b=1}$



Proy de S en xy

$S: \; z^2-x^2-y^2=0$

$G(x,y,z)=-x^2-y^2+z^2 \longrightarrow \nabla G(x,y,z)=(-2x,-2y,2z)$

$$N=\left(\frac{-2x}{2z},\frac{-2y}{2z},\frac{2z}{2z}\right)=\left(-\frac{x}{z},-\frac{y}{z},1\right)$$

$$\|N\|=\sqrt{\left(-\frac{x}{z}\right)^2+\left(-\frac{y}{z}\right)^2+1^2}=\sqrt{\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}+1}=$$

$z^2=x^2+y^2$

$$=\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{z^2}}=\sqrt{\frac{x^2+y^2+x^2+y^2}{x^2+y^2}}=\sqrt{2}$$

$$\boxed{\|N\|=\sqrt{2}}$$

$$A_S=\iint_S ds=\iint_{S_{xy}} \overbrace{\|N\|}^{\sqrt{2}}\, dx\,dy=\sqrt{2}\,\boxed{\iint_{S_{xy}} dx\,dy}=\sqrt{2}\cdot 2\pi$$

área de S_{xy}

Área elipse $= ab\pi = 2\times 1\pi = 2\pi$

$$\boxed{A_S = 2\sqrt{2}\,\pi}$$

NOTA

AM2	Final	HOJA N° 4/4 — FECHA 29-7-25

(P4) Calcular el flujo del campo vectorial $\bar{f}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ / $\bar{f}(x,y,z) = (\underbrace{x^3+y^3}_{P}, \underbrace{x^3+z^3}_{Q}, \underbrace{x^3+y^3}_{R})$ a través de la sup FRONTERA S del cuerpo $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 3 \le z \le 7 - x^2 - y^2\}$ orientada S con versor normal saliendo de H

S es sup. FRONTERA de H orientada al exterior ✓

H es una región de $\mathbb{R}^3$ ✓

$\bar{F} \in C^1$ (componentes polinómicos) $\quad \bar{F} = (P, Q, R)$

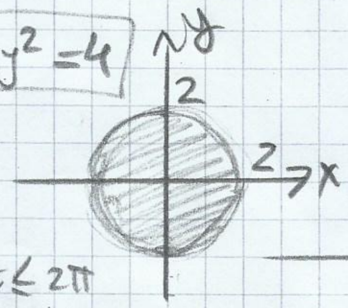
$\Rightarrow$ Se cumplen las hip. del t. Gauss $\Rightarrow \oint\!\!\oint_S \bar{f}\, d\bar{s} = \iiint_H div(\bar{f})\, dvol$

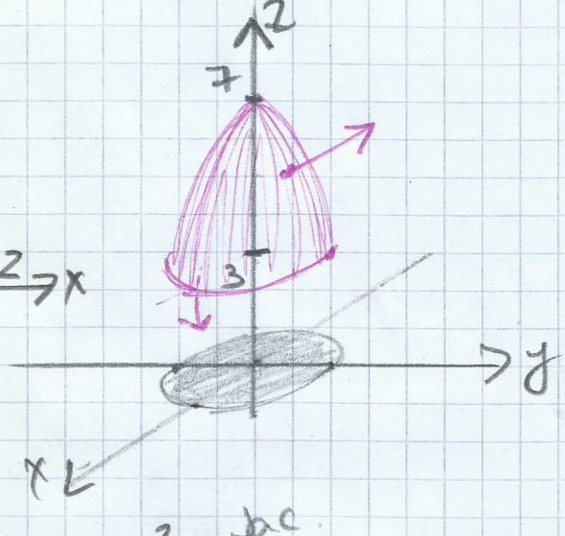
$div(\bar{F}) = P'_x + Q'_y + R'_z = 3x^2 + 0 + 0 \rightarrow \boxed{div(\bar{F}) = 3x^2}$

Analizo la proyección de H en xy

$$\begin{cases} z = 7 - (x^2+y^2) \\ z = 3 \end{cases} \rightarrow \boxed{x^2+y^2 = 4}$$

$$\begin{cases} x = r\cos(t) \\ y = r\,\text{sen}(t) \\ z = z \end{cases}$$





$0 \le t \le 2\pi$

$0 \le r \le 2$

$3 \le z \le 7 - r^2$

$$\oint\!\!\oint_S \bar{f}\, d\bar{s} = \iiint_H 3x^2\, dx\,dy\,dz \overset{C.V.}{=} 3\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_3^{7-r^2} \overset{Jac}{r}\, \underbrace{r^2\cos^2(t)}_{x^2}\, dz\,dr\,dt =$$

$$= 3\int_0^{2\pi}\int_0^2 r^3\cos^2(t)\, \overbrace{(7-r^2-3)}^{4-r^2}\, dr\,dt =$$

$$= 3\int_0^{2\pi}\int_0^2 4r^3\cos^2(t) - r^5\cos^2(t)\, dr\,dt = 3\int_0^{2\pi} 16\cos^2(t) - \frac{32}{3}\, dt =$$

$$= -16\pi$$

$$\boxed{\oint\!\!\oint_S \bar{f}\, d\bar{s} = -16\pi}$$

NOTA